数理解析研究所講究録
641巻 1988年 216-229

一般パスカル三角形の正方行列化について

上智大・理工　岩堀長慶(Nagayoshi Iwahori)

§1. 序

二項係数 ${}_nC_r = \binom{n}{r} = n!/r!(n-r)!$ 達を「山の形」に並べた数表(パスカル三角形)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

は高校生たもなじみ深いものである。これを二重数列

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{00} & & & \\
 & & a_{10} & & a_{01} & & \\
 & a_{20} & & a_{11} & & a_{02} & \\
a_{30} & & a_{21} & & a_{12} & & a_{03} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

と見做すと

$$
\begin{cases}
\text{初期条件} & a_{0j} = a_{j0} = 1 \quad (j=0,1,2,\cdots) \text{ 及び} \\
\text{漸化式} & a_{ij} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j} \quad (i,j=1,2,\cdots)
\end{cases}
$$

とで定義された二重数列 $\{a_{ij} \mid i,j=0,1,2,\cdots\}$ ということになる。以下の記述の都合のために、二重数列 $\{b_{ij}\}$ の書き方を二通り設定しておく。一つは下半三角行列の形の B であり，もう一つは正方行列の形の $\widetilde{B}$ である：

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & & & & 0 \\ b_{10} & b_{01} & & & \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} & & \\ b_{30} & b_{21} & b_{12} & b_{03} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \cdots \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \end{pmatrix}$$

そこでパスカル三角形の初期条件と漸化式を次の形で一般化する。いま4つの数列

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots)$$
$$p = (p_1, p_2, \cdots), \quad q = (q_1, q_2, \cdots)$$

に対して二重数列 $\{b_{ij}\}$ を

初期条件　$b_{0j} = \alpha_j \ (j=0,1,\cdots)$, $b_{j0} = \beta_j \ (j=1,2,\cdots)$

漸化式　$b_{ij} = p_i b_{i,j-1} + q_j b_{i-1,j} \ (i,j=1,2,\cdots)$

で定める。そして $n=0,1,2,\cdots$ に対して $n+1$ 次正方行列 $\tilde{B}_n = \tilde{B}_n(\alpha,\beta;p,q)$ と $B_n = B_n(\alpha,\beta;p,q)$ とを

$$\tilde{B}_n = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} b_{00} & & & 0 \\ b_{10} & b_{01} & & \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ b_{n0} & b_{n-1,1} & & b_{0n} \end{pmatrix}$$

と定義する。

すると様々な問題が自然発生する。例えば $\det\hat{B}_n$ と α, β, p, q との関係は？ $\tilde{B}_n$ と B_n 間の関係は？ もし $\prod_{j=0}^{n}(\det\tilde{B}_j) \neq 0$ ならば，Bruhat 分解の特別の場合なので，上半三角形行列系 $\hat{B}_j$ $(0 \leq j \leq n)$ が存在して $\tilde{B}_n = B_n\hat{B}_n$ の形に書ける。このとき $\tilde{B}_n$ の形は？ などなどである。更に視点を少し拡げて，漸化式の部分を

$$b_{ij} = p_i b_{i,j-1} + q_j b_{i-1,j} + c_{ij}$$

（$\{c_{ij}\}$ は与えられた二重数列）と一般化することも考えられる。しかしこれは可成難しくて一般論がわからない。特別な形（p_i, q_j は皆 $=1$, γ_{ij} は定数）の実例に後で触れる。

§2. 或る特別な場合（GL_n の表現論的解釈の例）

初期条件を $\alpha=(1,1,\cdots)$, $\beta=(1,1,\cdots)$ とし，漸化式の p と q を $p=(1,1,\cdots)$, $q=(q_1,q_2,q_3,\cdots)$ の形とする．（q は任意の数列）．この時 $\tilde{B}_n$ の行列成分が面白い形をもつことが分る。たとえば

$$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+q_1 & 1+q_1+q_2 \\ 1 & 1+q_1+q_1^2 & 1+q_1+q_2+q_1^2+q_1q_2+q_2^2 \end{pmatrix}$$

である。そこで一般線型群 $GL(m,\mathbb{C})$ の k 次対称表現 $\rho_{m,k}$，すなわち m 個の変数 $x_1,\cdots,x_m$ の k 次の斉次多項式全

体のなす空間 $S_k(x_1,\cdots,x_m)$ を表現空間とする表現の指標を $\chi_{m,k}$ とする。$\chi_{m,k}$ が対角行列 $h=\mathrm{diag.}(q_1,q_2,\cdots,q_m)$ でとる値は

$$\chi_{m,k}(h)=\chi_{m,k}(q_1,\cdots,q_m)=\sum_{1\leq j_1\leq\cdots\leq j_k\leq m} q_{j_1}q_{j_2}\cdots q_{j_k}$$

である。以下 $\chi_{m,k}(q_1,\cdots,q_m)$ を $\chi_{m,k}$ と書く。$\chi_{m,0}=1$ である。また $\chi_{0,k}=1$ とおく。すると $\tilde{B}_n$ の成分 b_{ij} を表わす式は

$$(2.1)\quad \begin{cases} b_{ij}=\chi_{j,0}+\chi_{j,1}+\cdots+\chi_{j,i} & (j=1,2,\cdots) \\ b_{i0}=1 \quad (i=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

となることが示せる。(証明は帰納法を用いて簡単にできる。$\tilde{B}_2$, $\tilde{B}_3$ 位の実験で (2.1) が見えてくる。) 次に分解 $\tilde{B}_n=B_n\hat{B}_n$ を与える行列 B_n, $\hat{B}_n$ の具体形も分る. 分り易くするため $n=4$ で書くと

$$(2.2)\quad B_n=\begin{pmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\1&1&1&&\\1&1&1&1&\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\0&q_1&1&&\\0&q_1^2&q_1&1&\\0&q_1^3&q_1^2&q_1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\0&0&1&&\\0&0&q_2&1&\\0&0&q_2^2&q_2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\0&0&1&&\\0&0&0&1&\\0&0&0&q_3&1\end{pmatrix}$$

$$(2.3)\quad \hat{B}_n=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&q_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&q_3&\\&&&&q_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&1&1\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&q_2&&\\&&&q_3&\\&&&&q_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&1&1&1\\&&1&1&1\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\&q_1&&&\\&&q_2&&\\&&&q_3&\\&&&&q_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\&1&1&1&1\\&&1&1&1\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}$$

となる。これを用いると $\det\tilde{B}_n=(\det B_n)\cdot(\det\hat{B}_n)=q_1q_2^2\cdots q_n^n$ が得られる：

$$(2.4)\qquad \det\tilde{B}_n=\det\hat{B}_n=q_1q_2^2q_3^3\cdots q_n^n$$

注 上智大数学科1年の杉谷哲也君も別の方法で(2.4)を示した。

§3. 実例若干

[例1] $q_1=q_2=\cdots=1$ の時はパスカル三角形の行列 $\tilde{B}_n$ で, $\hat{B}_n={}^tB_n$ (B_nの転置行列)となる. $\det\tilde{B}_n=1$ である。B_n^{-1} の形は (例: $n=3$)

$$(3.1)\qquad B_n^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\-1&1&&\\1&-2&1&\\-1&3&-3&1\end{pmatrix}$$

(B_nの(i,j)成分の$(-1)^{i+j}$倍が B_n^{-1} の(i,j)成分)

となるから, $\tilde{B}_n$ に関し次のような事実が簡単にわかる: $\tilde{B}_n^{-1}$ と $\tilde{B}_n$ とは相似行列である。nが偶数(>0)ならば, 1は$\tilde{B}_n$の固有値である。$\tilde{B}_n$ の固有多項式を $f_n(x)=x^{n+1}-\alpha_1x^n+\cdots+(-1)^{n+1}\alpha_{n+1}$ とおくと, $\alpha_0=1$ として

$$(3.2)\qquad \alpha_j=(-1)^{n+1}\alpha_{n+1-j}\quad(0\leq j\leq n+1)$$

となる。すなわち $\tilde{B}_n$ の j 次の首座小行列式の總和 α_j と $(n+1-j)$ 次首座小行列式の總和 α_{n+1-j} とは符号を除

いて一致する。

［例2］変数 q を用いて $q_j = q^j$ $(j=1,2,\cdots)$ とした時。
ガウスの二項係数と呼ばれる[redacted]量（q の多項式）

$$\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix} = \prod_{\nu=1}^{i+j}(q^{\nu}-1) \Big/ \prod_{\alpha=1}^{i}(q^{\alpha}-1)\prod_{\beta=1}^{j}(q^{\beta}-1)$$

を用いて $b_{ij} = \begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}$ と書ける。(2.2), (2.3) から

$$(3.3) \qquad \hat{B}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & q^{1^2} & & \\ & & q^{2^2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & q^{n^2} \end{pmatrix} {}^t B_n \qquad \therefore \tilde{B}_n = B_n \begin{pmatrix} 1 & & \\ & q & \\ & & \ddots \\ & & & q^{n^2} \end{pmatrix} {}^t B_n$$

となり，$\tilde{B}_n$ は対称行列で，$\det \tilde{B}_n = q^{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ が得られる。$q=1$ とおくと，［例1］が生ずる。$B_n^{-1} = C_n^{\Delta} = (c_{ij})$ とおくと，(3.1) の q-version の形で成分 c_{ij} の式が出る。

$$(3.4) \qquad c_{ij} = (-1)^{i+j} q^{1+2+\cdots+(i-j-1)} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

［例3］$q_j = j+1$ $(j=1,2,\cdots)$ とした時。
第2種 Stirling 数という名の量 $S(m,k)$ が $\hat{B}_n$ の成分 b_{ij} として登場する。($S(m,k)$ は $\{1,2,\cdots,m\}$ を k 個の部分集合に直和分割する仕方の総数。) $b_{ij} = S(i+j, j)$ である。公式 (2.3) を用いて

$$(3.5) \qquad \det \tilde{B}_n = 2\cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdots n^{n-1}$$

が得られる。この式は R. Stanley 論[redacted]文「パン屋の1ダース予想」(［1］参照) 中に登場する或る未解決予想の"行列式型のいいかえ"となっている点が興味深い。未解決予想とは

「n次正方行列 $A=(a_{ij})$ で、a_{ij} は皆 0 か 1 か -1 で、A の各行、各列の和はすべて $=1$ となり、各行、各列では 1 と -1 とが出現するときは、途中の 0 を無視すれば、1 と -1 とは隣接している」という行列を n 次の交代符号行列と呼ぶ。その総数を $\mathcal{A}_n$ とおく。例えば $\mathcal{A}_1=1$, $\mathcal{A}_2=2$, $\mathcal{A}_3=7$（置換行列が $3!=6$ 個，もう一つは $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3$）である。

$$(3.6) \qquad \mathcal{A}_n = \frac{1!\,4!\,7!\cdots(3n-2)!}{n!\,(n+1)!\cdots(2n-1)!}$$

が予想式である。$\mathcal{A}_n$ の分子，分母が（2.4 [redacted]）の形（(3.5)に近い）となり，行列式的解釈が期待される：

$$\begin{cases} \tilde{q}_j = (3n-3j+1)(3n-3j)(3n-3j-1) & (1 \leqq j \leqq n-1) \\ Q_j = 2n-j \quad (1 \leqq j \leqq n-1), & Q_n = n! \end{cases}$$

とおくと

$$(3.7)\begin{cases} \mathcal{A}_n \text{ の分子} = \tilde{q}_1 \tilde{q}_2^{\,2} \tilde{q}_3^{\,3} \cdots \tilde{q}_{n-1}^{\,n-1} \\ \quad〃 \quad \text{分母} = Q_1 Q_2^2 Q_3^3 \cdots Q_{n-1}^{n-1} Q_n^n \end{cases}$$

となる。対応する $\widehat{B}_n$, B_n 達の意味づけは果して何か？

§4. 付記若干

本来のパスカル三角形（例1）から上部と左部にある成分を削りとると，初期条件 α, β のみが変り漸化式 p, q は変らない。例えば始の k 行と k 列を削りとって作った $n+1$ 次正方行列

$$A_{k,n}=\begin{pmatrix} \binom{2k}{k} & \binom{2k+1}{k} & \cdots & \binom{2k+n}{k} \\ \binom{2k+1}{k+1} & \binom{2k+2}{k+1} & \cdots & \binom{2k+n+1}{k+1} \\ \cdots\cdots & & & \\ \binom{2k+n}{k+n} & \binom{2k+n+1}{k+n} & \cdots & \binom{2k+2n}{k+n} \end{pmatrix}$$

の行列式の値はどう考えれば出て来るか？ Bruhat分解の考え方が有効である：$A_{k,n}=D^{-1}XYF$ と分解する．但し

$$D=\begin{pmatrix} d_0 & & 0 \\ & d_1 & \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} f_0 & & 0 \\ & f_1 & \\ 0 & \cdots & f_n \end{pmatrix},\quad \begin{array}{l} d_j=\binom{k+j}{k}, \\ f_j=\binom{2k+j}{k} \end{array}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_{00} & & & 0 \\ x_{10} & x_{11} & & \\ \cdots & & \ddots & \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} & \vdots & y_{0n} \\ & y_{11} & \vdots & y_{1n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x_{ij}=\binom{2k+i}{-j+i},\quad y_{ij}=\binom{j}{i}$$

である。$\det X=\det Y=1$ なので

$$(4.1)\qquad \det A_{k,n}=\prod_{j=0}^{n}\binom{2k+j}{k}\Big/\prod_{j=0}^{n}\binom{k+j}{k}$$

を得る。kを固定して $\det A_{k,n}$ をnの関数と考えると(4.1)から，これはnのk^2次の多項式となることがわかる。

上と同様に $b_{ij}=\left[{i+j \atop i}\right]=$(ガウスの二項係数) とした行列 $\widetilde{B}_n$ から例えば第1行と第1列を削りとった行列の行列式も出来る．いま

$$G_n=\begin{pmatrix} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{1} & \cdots & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{1} \\ \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{2} & \cdots & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{2} \\ \cdots & & & \\ \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n-1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{n-1} & \cdots & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2n-2}{n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$(4.2)\qquad \det G_n = q^{2\binom{n-1}{3}+3\binom{n-1}{2}}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$$

となる。

*　　*　　*

次に (2.2) と一寸異なる視野からパスカル三角形，ガウス三角形の[redacted]三角行列表示を眺めて見る。下半三角形行列の形のパスカル三角形

$$(4.3)\qquad C_n=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

は $\log$ をとると，巾零行列

$$(4.4)\qquad N_n=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & 0 & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 0 \\ & & & n & 0 \end{pmatrix}$$

となる。従って

$$(4.5)\qquad C_n = \exp(N_n) = I + N_n + \frac{1}{2!}N_n^2+\cdots$$

となる。ついでに，此の式から C_n の t 乗（t は整数）の形が直ぐ出る：

$$(4.6)\quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ k & 1 & & & \\ k^2 & 2k & 1 & & \\ k^3 & 3k^2 & 3k & 1 & \\ \cdots & & & & \ddots \\ k^n, & \binom{n}{1}k^{n-1}, & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

しかしガウス三角形の時は log をとっても意味がつけにくい。そこで exp, log の q-version を試みると、これがうまく行く．exp の q-version を $\exp]_q$ と書き、次のように定義する：正方行列 M に対し

$$(4.7)\quad \exp]_q(M) = I + M + \frac{M^2}{1+q} + \frac{M^3}{(1+q)(1+q+q^2)} + \cdots$$

M が巾零なら右辺は有限和である。そこで上の N_n の q-version として

$$(4.8)\qquad M_q = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1+q & 0 & & & \\ & & 1+q+q^2 & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1+\cdots+q^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

を作ると

$$(4.9)\quad \begin{pmatrix} \left[{0 \atop 0}\right] & & & & \\ \left[{1 \atop 0}\right] & \left[{1 \atop 1}\right] & & & \\ \left[{2 \atop 0}\right] & \left[{2 \atop 1}\right] & \left[{2 \atop 2}\right] & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \left[{n \atop 0}\right] & \left[{n \atop 1}\right] & \cdots & & \left[{n \atop n}\right] \end{pmatrix} = \exp]_q(M_q)$$

という公式が成り立つことがわかる。しかしこれの意味づけ

はまだうまくいえない状態である。

* * *

序の終で述べた実例を述べる。$\alpha=(x, x+1, x+2, \cdots)$ $\beta=(x+1, x+2, \cdots)$, $p=(1,1,\cdots)$, $q=(1,1,\cdots)$ として $\tilde{B}_n=(b_{ij})$ を $b_{i,j}=b_{i-1,j}+b_{i,j-1}+k$ (kは与えらた定数)で定める. $\det\tilde{B}_n=F_n(x)$ はどのような多項式か?

上式から, $\tilde{B}_n$ の左から(4.3)の C_n の逆行列 C_n^{-1} を掛け, $\tilde{B}_n$ の右から ${}^tC_n$ の逆行列を掛けることにより一即ち $\tilde{B}_n$ の各行から前の行を引算し, また各列から前の列を引算する —という操作を操返して, 次式を得る。

$$(4.10)\qquad C_n^{-1}\tilde{B}_n{}^tC_n^{-1}=\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x+k & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & x+k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 & & 1 & x+k \end{pmatrix}=D_n とする.$$

よって, $\tilde{B}_n=C_nD_n{}^tC_n$ となり, $\det\tilde{B}_n=\det D_n$ となる. $f_n(x)=\det D_n$ とおくと, D_n の形から漸化式

$$\begin{cases} f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x) \\ 初期条件\ f_1(x)=x,\quad f_2(x)=x^2+kx-1 \end{cases}$$

が得られる。特に $k=0$ とすると, $f_n(x)$ はチェビシエフ多項式となり, 根は $2\cos\frac{\pi}{n+1}j$ $(1\leqq j\leqq n)$ となる。このような考え方は $p=(1,1,\cdots)$, $q=(1,1,\cdots)$ の時は

いつも有効である。例えば(4.1)に出現した行列 $A_{k,n}$ に対しては $C_n^{-1} A_{k,n} {}^{t}C_n^{-1}$ を作ると、「準対角行列」

$$\begin{pmatrix}
\xi_k & \xi_{k-1} & \cdots & \xi_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\xi_{k-1} & \xi_k & \xi_{k-1} & \cdots & \xi_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \xi_{k-1} & \ddots & & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & \ddots & & 0 \\
\xi_0 & & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \xi_0 \\
0 & \ddots & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \xi_{k-1} \\
0 & \cdots & 0 & \xi_0 & \cdots & & & \xi_{k-1} & \xi_k
\end{pmatrix}$$

となる。

但し、$\xi_k = \binom{2k}{k}$, $\xi_{k-1} = \binom{2k}{k-1}$, $\cdots$, $\xi_0 = \binom{2k}{0} = 1$ である。しかし、この形から行列式を算出するのは漸化式が容易に出ないという難点がある。Bruhat分解の方法が遥に強力である。

[参考文献]

[1] R.P. Stanley: Enumerative Combinatorics, vol.1, 1987 (及び SLN.1234号)

[2] 〃: Unimodality and Lie Superalgebras, Studies in Applied Math. 72, 1985, 263–281

[3] 〃: Unimodal sequences arising from Lie algebras, Lec. Note in Pure and App. Math. 57, 1980, 127–136

[4] 〃: GL(n, ℂ) for combinatorialists, London Math. Soc. Lec. Notes Ser. #82, 1983, 187–199

[5] 雨宮-岩堀-小池: On some generalization of B. Kostant's partition function, Prog. in Math. 14, 1981 松島記念号

[6] I.G. Macdonald: Sym. functions and Hall polynomials, Oxford.

[付録]

$1^k+2^k+\cdots+n^k=P_k(n)$ は n の $k+1$ 次多項式で定数項は0となる。そこで $P_k(n)=b_{k,0}\binom{n}{1}+b_{k-1,1}\binom{n}{2}+\cdots+b_{0,k}\binom{n}{k+1}$ とおく。但し $b_{0,0}=1$ とする。すると行列 $\widehat{B}=(b_{rs})$ は

$$
\begin{array}{c}
\\ 0) \\ 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 2 & 6 & 24 & \cdots \\
1 & 3 & 12 & 60 & 360 & \cdots \\
1 & 7 & 50 & 390 & 3360 & \cdots \\
1 & 15 & 180 & 2100 & \cdots & \\
1 & 31 & 602 & \cdots & & \\
\cdots & & & & &
\end{array}\right)
\end{array}
$$

となる。これは初期条件 $\alpha=(0!,1!,2!,3!,\ldots)$, $\beta=(1,1,\cdots)$

漸化式は $r\geqq s$ の時 $b_{r,s}=s\cdot b_{r\text{[redacted]},s-1}+(s+1)\,b_{r-1,s}$ である。

$r<s$ の時も $b_{r,s}=s\cdot b_{r,s-1}+(s+1)\,b_{r-1,s}$ である。

よって，これは§1の $\widehat{B}_n$ の条件は満していない。しかし例えば $n=4$ として

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 2 & 6 & 24 \\
1 & 3 & 12 & 60 & 360 \\
1 & 7 & 50 & 390 & 3360 \\
1 & 15 & 180 & 2100 & \cdot \\
1 & 31 & 602 & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\
1 & 7 & 25 & 65 & 140 \\
1 & 15 & 90 & 350 & 1050 \\
1 & 31 & 301 & \underset{1701}{\text{[redacted]}} & 6951
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & 1 & & & \\
 & & 2 & & \\
 & & & 6 & \\
 & & & & 24
\end{pmatrix}
$$

がわかる。右辺の第一項は例3のStirling数の行列であり，右辺第二項は対角成分が $0!,1!,2!,\cdots$ である。よって Stirling数の公式

(☆) $$S(m,k)=\frac{1}{k!}\left\{k^m-\binom{k}{1}(k-1)^m+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\cdot 1^m\right\}$$

から上の $b_{r,s}$ が得られる。

ついでにもう一つ：多項式 $b_{k,0}t^k+b_{k-1,1}t^{k-1}+\cdots+b_{0,k}$ は実は $(t+1)$ で割り切れることが云える。割った商を

$$c_{k-1,0}t^k + c_{k-2,1}t^{k-1} + \cdots + c_{0,k-1}$$

とおくと，

$$n^k = c_{k-1,0}\binom{n}{1} + c_{k-2,1}\binom{n}{2} + \cdots + c_{0,k-1}\binom{n}{k}$$

の成立がわかる。行列 (c_{ij}) $(c_{0,0}=1)$ は

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 7 & 25 & 65 & 140 \\ 1 & 15 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 31 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1! & & & \\ & 2! & & \\ & & 3! & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

となり，やはりStirling数で書ける．上式は次式と同じである。

$$c_{ij} = S(i+j, j)\cdot j!$$

(☆)を行列形で書くとより印象的である:

$$(☆☆)\quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 3 & 7 & 15 \\ & & 2 & 12 & 50 \\ & & & 6 & 60 \\ & & & & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \end{pmatrix}$$

従って右辺の行列(n次の場合)の行列式は

$$(n-1)!\,(n-2)!\cdots 2!\,1! = 2^{n-2}3^{n-3}\cdots(n-1)^1$$

となり，例3中の話(交代符号行列の個数)とまた関係が出現しそうな気がする。尚(☆☆)は前述の$P_k(n)$と

$$(☆☆☆)\qquad (n+1)^m = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} b_{m-j,j}$$

という形で関連している。ついでに(☆)から出るもう一つのことは，nが$\geqq k$なら$n^k - \binom{k}{1}(n-1)^k + \cdots + (-1)^k\binom{k}{k}(n-k)^k = k!$ [終]